

# Zur Theorie der magnetischen Effekte in isotropen Halbleitern hoher Beweglichkeit

Von OTFRIED MADELUNG

Aus dem Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke A.G. Erlangen

(Z. Naturforschg. 8a, 791—795 [1953]; eingegangen am 18. September 1953)

Zur Beschreibung des Hall-Effektes und der Widerstandsänderung im magnetischen Feld bei Halbleitern hoher Beweglichkeit ist die übliche Theorie der magnetischen Effekte in schwachen Magnetfeldern nicht mehr hinreichend. Da in ihr immer das Produkt aus Beweglichkeit und magnetischer Feldstärke maßgebend ist, beschränkt sie sich nicht nur auf schwache Felder, sondern auch auf Halbleiter nicht allzu hoher Beweglichkeit der Ladungsträger. Insbesondere für gemischte Halbleiter hoher Beweglichkeit wird der Hall-Koeffizient starkfeldstärkeabhängig. Dabei kann, wie schon in einer früheren Arbeit gemeinsam mit H. Welker gezeigt wurde, mit wachsender Feldstärke ein Vorzeichenwechsel des Hall-Koeffizienten auftreten. Die Widerstandsänderung im Magnetfeld nähert sich mit wachsender Feldstärke einem Sättigungswert.

Zur Bestimmung der Teilchendichten und der Beweglichkeiten in Halbleitern werden weitgehend die magnetischen Effekte, insbesondere der Hall-Effekt und die Widerstandsänderung im transversalen Magnetfeld herangezogen. Bei einem reinen Störstellenhalbleiter (Stromtransport durch nur einen Typ von Ladungsträgern) erhält man aus dem Hall-Koeffizienten direkt die Teilchendichte, während die Beweglichkeiten entweder aus kombinierteren Hall-Effekts- und Leitfähigkeitsmessungen oder aus der magnetischen Widerstandsänderung folgen. Für gemischte Halbleiter, also für Halbleiter, in denen gleichzeitig Elektronen und Löcher am Stromtransport teilnehmen, ist man dagegen auf die gleichzeitige Messung mehrerer Größen angewiesen. Hierauf wurde bereits in einer früheren Arbeit eingegangen<sup>1</sup>.

Die Theorie der magnetischen Effekte in isotropen Halbleitern ist für schwache Magnetfelder weitgehend entwickelt und zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment<sup>2</sup>.

Als maßgebende Größe tritt hier jedoch nicht die magnetische Feldstärke allein auf, sondern immer das Produkt aus Beweglichkeit und Feldstärke  $\mu H$ . Die Gültigkeit wird also nicht nur auf schwache Felder begrenzt, sondern auch auf nicht allzuhohe Beweglichkeiten der Ladungsträger. In der letzten

Zeit wurden jedoch unter den von Welker<sup>3,4</sup> entdeckten Halbleitern vom Typus  $A^{III}B^V$  Substanzen extrem hoher Beweglichkeit, z. B. InSb mit einer Elektronenbeweglichkeit von etwa  $60000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$  gefunden, so daß sich eine Erweiterung der Theorie auf höhere Feldstärken (und damit auf Halbleiter hoher Beweglichkeit) als notwendig erwies.

Für große Magnetfelder wurde die Theorie des Hall-Effektes und der magnetischen Widerstandsänderung bisher nur in zwei Grenzfällen untersucht. Harding<sup>5</sup> behandelte den Fall des reinen Störstellenhalbleiters, beschränkte sich aber im wesentlichen nur auf den Grenzfall unendlich hoher Felder. Johnson und Whitesell<sup>6</sup> untersuchten den Eigenhalbleiter in hohen Feldern. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die Theorie der magnetischen Effekte bei hohen Feldern (bzw. Beweglichkeiten) auch auf den gemischten Halbleiter auszudehnen.

Die korpuskulare Theorie der Leitfähigkeit in isotropen Halbleitern geht von der Boltzmannschen Stationaritätsbedingung aus, die fordert, daß im stationären Zustand die Änderung der Verteilungsfunktion der Elektronen bzw. Löcher durch äußere Felder gleich der Änderung durch Gitterstöße ist. Hieraus folgt für den elektrischen Strom in gekreuzten Feldern ( $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ ,  $\vec{H} = (0, 0, H_z)$ ) allgemein<sup>6</sup>:

<sup>1</sup> O. Madelung u. H. Welker, Z. angew. Physik 5, 12 [1953].

<sup>2</sup> S. z. B. H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle, Verlag Springer, Berlin 1936.

<sup>3</sup> H. Welker, Z. Naturforschg. 7a, 744 [1952]; 8a, 248 [1953].

<sup>4</sup> H. Weiß, Z. Naturforschg. 8a, 463 [1953].

<sup>5</sup> J. W. Harding, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A 140, 205 [1933].

<sup>6</sup> V. A. Johnson u. W. J. Whitesell, Physic. Rev. 89, 941 [1953].



$$i_x = (A_n + A_p) E_x - (B_n + B_p) E_y, \quad (1)$$

$$i_y = (B_n - B_p) E_x + (A_n + A_p) E_y,$$

wo

$$A_{n,p} = -\frac{8\pi e^2}{3m_{n,p}^2} \int_0^\infty l_{n,p} \varepsilon \frac{\partial f_{on,p}}{\partial \varepsilon} \frac{1}{s_{n,p}^2 + 1} d\varepsilon, \quad (2)$$

$$B_{n,p} = -\frac{8\pi e^2}{3m_{n,p}^2} \int_0^\infty l_{n,p} \varepsilon \frac{\partial f_{on,p}}{\partial \varepsilon} \frac{s}{s_{n,p}^2 + 1} d\varepsilon.$$

Hierin beziehen sich die Indizes n bzw. p auf die Elektronen bzw. Löcher.  $m_n$  bzw.  $m_p$  sind die scheinbaren Massen und  $l_n$  bzw.  $l_p$  die freien Weglängen der Ladungsträger. Die Größen  $f_0$  und  $s$  sind definiert durch:

$$f_{on} = n \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\varepsilon/kT}, \quad s_n = \frac{el_n}{m_n v_n} H_z, \quad (3)$$

und entsprechend  $f_{op}$  und  $s_p$ .

Unter der Annahme einer geschwindigkeitsunabhängigen freien Weglänge (thermische Streuung, keine Streuung an ionisierten Störstellen) wird schließlich mit

$$\mu = \frac{4e l}{3\sqrt{2\pi m k T}}$$

$$A_n = en\mu_n K_n, \quad A_p = ep\mu_p K_p, \quad (4)$$

$$B_n = en\mu_n K \sqrt{\frac{\gamma_n \pi}{2}} L_n, \quad B_p = ep\mu_p \sqrt{\frac{\gamma_p \pi}{2}} L_p$$

mit

$$K = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{x + \gamma} dx = 1 - \gamma + \gamma^2 e^\gamma (-\text{Ei}(-\gamma)), \quad (5)$$

$$L = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} e^{-x}}{x + \gamma} dx, \quad \gamma = \frac{9\pi}{16} (\mu H_z)^2.$$

### 1. Leitfähigkeit ohne Magnetfeld

Für  $\gamma = 0$  wird  $K = L = 1$  und  $B = 0$ , also folgt für (1):

$$i_x = \sigma_0 E_x, \quad i_y = \sigma_0 E_y, \quad \sigma_0 = en\mu_n + ep\mu_p. \quad (6)$$

### 2. Schwache Magnetfelder, kleine Beweglichkeiten

Für kleine  $\gamma$  wird  $K = 1 - \gamma$ ,  $L = 1$ . Durch Einsetzen dieser Werte in (4) erhält man für den Hall-Koeffizienten und die transversale Widerstandsänderung mit Hilfe von (1) wegen  $i_y = 0$  die bekannten Gleichungen:

$$R = \frac{E_y}{i_x H_z} = -\frac{3\pi}{8e} \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{(\mu_n n + \mu_p p)^2},$$

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_H} = \frac{\varrho_H - \varrho_0}{\varrho_H} = -\frac{\sigma_H - \sigma_0}{\sigma_0} = \left( \frac{3\pi}{8} H_z \right)^2 \left\{ \frac{4}{\pi} \frac{\mu_n^3 n + \mu_p^3 p}{\mu_n n + \mu_p p} - \left( \frac{\mu_n^2 n - \mu_p^2 p}{\mu_n n + \mu_p p} \right)^2 \right\}. \quad (7)$$

### 3. Exakte Auswertung

Die exakte Auswertung der in (5) gegebenen Integrale wurde teilweise schon früher von Johnson und Whitesell<sup>6</sup> durchgeführt und für den Eigenhalbleiter diskutiert. Die dort angegebenen Werte für  $K$  und  $L$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  wurden für größere  $\gamma$  ergänzt. Den Verlauf der Funktionen  $K(\gamma)$  und  $L(\gamma)$  zeigt Abb. 1.

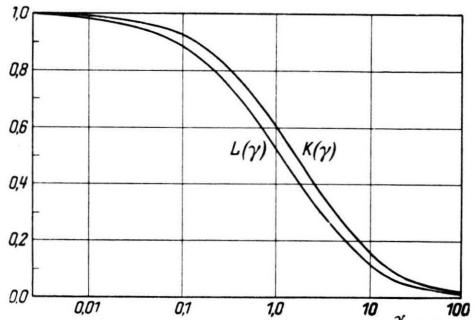


Abb. 1. Abhängigkeit der Funktionen  $K$  und  $L$  von  $\gamma$  nach Gl. (5).

#### a) Hall-Koeffizient

Durch Einsetzen der  $A$  und  $B$  aus (4) in (1) folgt für den Hall-Koeffizienten der Ausdruck

$$R = -\frac{\alpha}{e H_z (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \text{wo}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_p \pi} \left( n \mu_n \sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_p}} L_n - p \mu_p L_p \right),$$

$$\beta = n \mu_n K_n + p \mu_p K_p, \quad (8)$$

oder mit

$$b = \frac{\mu_n}{\mu_p} = \sqrt{\frac{\gamma_n}{\gamma_p}}, \quad x = \frac{n}{n_i} = \left( \frac{p}{n_i} \right)^{-1}, \quad (9)$$

$$R = -\frac{3\pi}{8en_i} \left( b^2 x L_n - \frac{1}{x} L_p \right) \cdot \left[ \left( b x K_n + \frac{1}{x} K_p \right)^2 + \frac{\pi}{4b^2} \gamma_n \left( b^2 x L_n - \frac{1}{x} L_p \right)^2 \right]^{-1}. \quad (10)$$

Die Abhängigkeit des Hall-Koeffizienten vom Magnetfeld ist hier in  $\gamma_n$  und den  $L$  und  $K$  (als Funktion von  $\gamma_n$ ) enthalten. Maßgebend ist also immer

nur das Produkt  $\mu H$ . Für eine Elektronenbeweglichkeit  $\mu_n = 3300 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$  in Germanium bzw.  $60000 \text{ cm}^2/\text{Vsec}$  in Indiumantimonid entspricht  $\gamma_n = 10$  in Ge einem Feld von 72000 Gauß, in InSb von 4000 Gauß,  $\gamma_n = 100$  in Ge einem Feld von 230000 Gauß, in InSb von nur 12500 Gauß. Abweichungen von der üblichen Näherung für schwache Magnetfelder treten also bei InSb wesentlich früher auf als bei Ge.

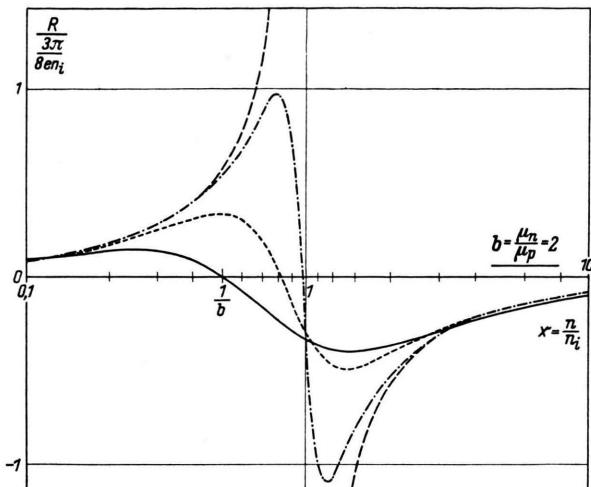


Abb. 2.

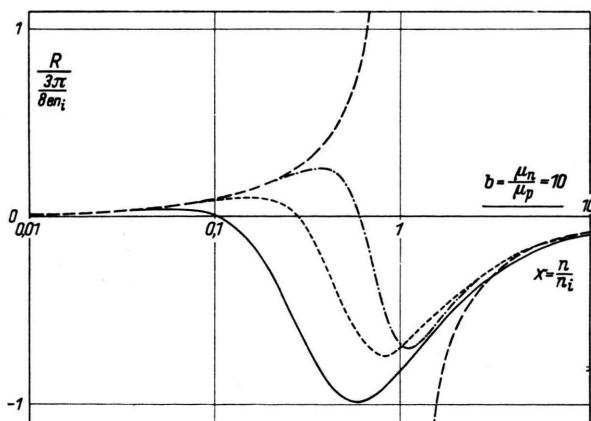


Abb. 3.

In Abb. 2–4 sind nach (10) berechnete Funktionen  $R(x)$  (Parameter  $\gamma_n$ ) für verschiedene  $b = \mu_n/\mu_p$  aufgetragen. Gezeichnet ist nur das Zwischengebiet des gemischten Halbleiters. Für Störstellenhalbleiter bleibt  $R$  angenähert konstant und zwar negativ für Überschußhalbleiter und positiv für De-

fekthalbleiter. Im gemischten Halbleiter ist dagegen  $R$  sehr stark feldstärkeabhängig. Man erkennt aus den Abbildungen leicht folgendes: Im Bereich  $x < 1$  (Überwiegen der Löcher) wächst  $R$  mit zunehmender Feldstärke, im Bereich  $x > 1$  (Überwiegen der Elektronen) fällt  $R$  ab. Ist die Elektronenbeweglichkeit jedoch größer als die Löcherbeweglichkeit, so setzt sich der Einfluß der Elektronen auch im p-Gebiet ( $x < 1$ ) teilweise noch durch und im Bereich

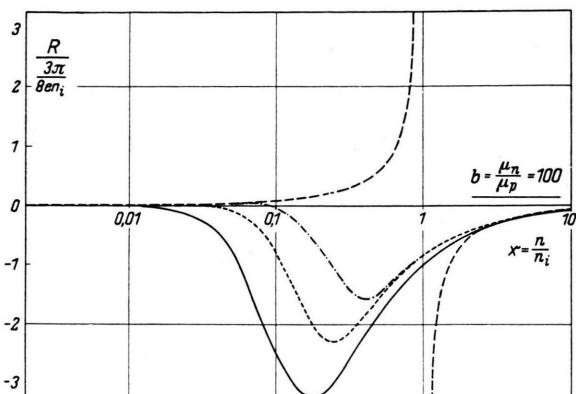


Abb. 4.

Abb. 2–4. Abhängigkeit des Hall-Koeffizienten von der Elektronendichte für verschiedene magnetische Feldstärken und Beweglichkeitsverhältnisse.

Kurve	$\gamma$	$H(\text{Ge})$	$H(\text{InSb})$
—	0	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$ $\Gamma$
- - -	10	72 000	4 000 $\Gamma$
- · -	100	230 000	12 500 $\Gamma$
- - -	$\infty$	$\infty$	$\infty$ $\Gamma$

mit  $\mu_{\text{Ge}} = 3600, \mu_{\text{InSb}} = 60000 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vsec}}$

$1/b < x < 1$  besitzt der Hall-Koeffizient für schwache Felder noch das für Elektronenleitung charakteristische negative Vorzeichen. Mit wachsendem Magnetfeld verliert sich jedoch der Einfluß der Elektronen und der Hall-Koeffizient wächst zu positiven Werten hin an. Während z. B. für  $b = 2$  (Abb. 2) der Hall-Koeffizient bei  $x = 0,8$  für schwache Felder den Wert  $-0,25 \cdot 3\pi/8en_i$  besitzt, hat er bei  $\gamma = 100$  den Wert  $+3\pi/8en_i$ , also den viermal größeren Wert mit umgekehrtem Vorzeichen. Auf diesen Vorzeichenwechsel des Hall-Koeffizienten mit wachsendem Feld wurde bereits in der oben zitierten, frühe-

ren Arbeit<sup>1</sup> hingewiesen. Infolge der unzureichenden Näherung konnte dort jedoch noch nicht der exakte Verlauf gezeigt werden.

Für größere Werte von  $b$  (größerer Einfluß der Elektronen im „p-Gebiet“) wird der Hall-Koeffizient bei schwachen Feldern stark negativ und erreicht positive Werte erst bei sehr hohen Feldstärken (Abb. 3 und 4).

Abb. 5 zeigt den Vergleich mit dem Experiment. Sie zeigt die Temperaturabhängigkeit des Hall-Koeffizienten von p-leitendem InSb für zwei verschiedene Feldstärken<sup>7</sup>.

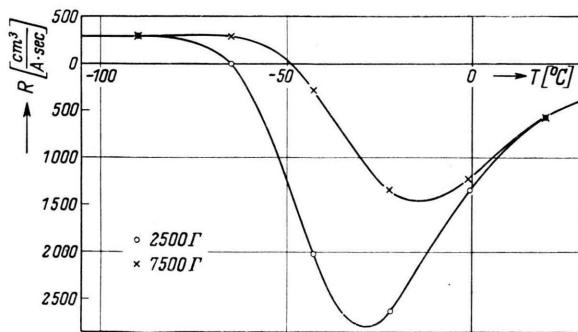


Abb. 5. Temperaturabhängigkeit des Hall-Koeffizienten von InSb.

Ein Vergleich mit Abb. 2–4 zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Aus der Lage des Maximums, der nur schwachen Verschiebung des Nulldurchgangs sowie der Feldabhängigkeit von  $R$  folgt ein großes Verhältnis von Elektronenbeweglichkeit zu Löcherbeweglichkeit in InSb, ebenfalls in Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, aus denen ein  $b$  der Größenordnung 50 folgt<sup>4</sup>. Dies steht auch im Einklang mit dem Befund, daß n-leitendes InSb bei der Annäherung an die Eigenleitung keine starke Feldabhängigkeit des Hall-Koeffizienten zeigt.

Ein quantitativer Vergleich zwischen Theorie und Experiment soll hier jedoch nicht durchgeführt werden. Dazu ist bisher die Kenntnis der Temperaturabhängigkeit von  $n$  und  $\gamma$  (also  $\mu$ ) im Bereich zwischen Störstellenleitung und Eigenleitung noch zu ungenau.

Wir betrachten jetzt den Nulldurchgang etwas genauer: Aus (10) folgt als Bedingung für das Verschwinden von  $R$  (Nullwerden des Zählers):

<sup>7</sup> Unveröffentlichte Messungen von H. Weiß. Vgl. auch l. c.<sup>4</sup>, Abb. 4.

$$x^2 = \frac{1}{b^2} \frac{L_n}{L_p}. \quad (11)$$

Für kleine  $\gamma$  folgt daraus wegen  $L_p = L_n = 1$  der Wert  $x = 1/b$ . Für sehr große  $\gamma$  findet man wegen

$$L_p = \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} e^{-x}}{x + \gamma_n b^2} dx = b^2 \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} e^{-x}}{b^2 x + \frac{1}{x}} dx, \quad (12)$$

$$L_p (\gamma \rightarrow \infty) = b^2 L_n (\gamma \rightarrow \infty)$$

$x = 1$ . Für unendlich hohe Felder rückt also der Nulldurchgang zur Eigenleitung.

Wir geben schließlich noch den Wert des Hall-Koeffizienten für unendlich hohe Felder  $R_\infty$ . Dann wird

$$K (\gamma \rightarrow \infty) = \frac{1}{\gamma} \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = \frac{2}{\gamma}, \quad (13)$$

$$L (\gamma \rightarrow \infty) = \frac{1}{\gamma} \frac{2}{V\pi} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3\gamma}{2}.$$

Einsetzen dieser Werte in (10) führt zu:

$$R_\infty = -\frac{1}{en_i} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{e} \frac{1}{n-p}, \quad (14)$$

$$R_{\infty n} = -\frac{1}{en}, \quad R_{\infty p} = \frac{1}{ep}.$$

## b) Magnetische Widerstandsänderung

Für die transversale magnetische Widerstandsänderung ergibt sich in Analogie zu (10):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varrho}{\varrho_H} &= 1 - \frac{\sigma_H}{\sigma_0} = 1 - \frac{1}{bx + \frac{1}{x}} \left\{ \left( xbK_n + \frac{1}{x} K_p \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{4b^2} \gamma_n \frac{\left( xb^2 L_n - \frac{1}{x} L_p \right)^2}{xbK_n + \frac{1}{x} K_p} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Für  $\gamma \rightarrow \infty$  folgt hier der Grenzwert:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_H} \Big|_\infty = 1 - \frac{9\pi}{32} \frac{\left( x - \frac{1}{x} \right)^2}{\left( bx + \frac{1}{x} \right) \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{x} \right)}, \quad (16)$$

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_H} \Big|_\infty n = \frac{\Delta \varrho}{\varrho_H} \Big|_\infty p = 1 - \frac{9\pi}{32}. \quad (17)$$

Im Gegensatz zum Verhalten des Hall-Koeffizienten ist die transversale magnetische Widerstandsänderung gemischter Halbleiter nicht wesentlich von der reiner Störstellenhalbleiter verschieden.

Für kleine Feldstärken wächst  $\Delta\varrho/\varrho_H$  proportional  $H^2$ , nähert sich aber mit wachsendem  $H$  einem Sättigungswert. Das Maximum der magnetischen Widerstandsänderung liegt im Gebiet der gemischten Leitung um so weiter nach kleinen  $x$  verschoben, je größer  $b$  ist. In Übereinstimmung hiermit tritt die Abweichung von dem für kleine Felder gültigen quadratischen Gesetz bei InSb wesentlich früher auf als bei Ge<sup>4</sup>.

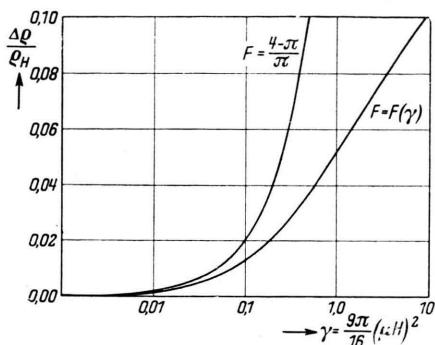


Abb. 6.

Abb. 6 zeigt die Feldabhängigkeit der transversalen magnetischen Widerstandsänderung

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho_H} = \left(\frac{3\pi}{8}\mu H_z\right)^2 F(\mu H_z) = \frac{\pi}{4}\gamma^2 F(\gamma) \quad (18)$$

für einen Störstellenhalbleiter. Gezeichnet ist die Näherung für schwache Felder [ $F(\gamma) = (4 - \pi)/\pi$ ] und die exakte Rechnung mit  $F(\gamma)$  aus Gl. (15). Es muß jedoch hier betont werden, daß bei InSb und Ge Werte von  $\Delta\varrho/\varrho_H$  gemessen wurden, die über dem aus der vorliegenden Theorie berechneten Maximalwert liegen. Dies kann dann eintreten, wenn die Präparatdicke nicht klein gegen die Präparatlänge ist, also wenn die der Theorie zugrunde liegende Forderung  $i_y = i_z = 0$  nicht erfüllt ist. Der Widerstand erhöht sich in diesem Fall zusätzlich um einen vom Hall-Winkel abhängigen Wert. Eine weitere Ursache hierfür kann in der Anisotropie liegen, die hier nicht berücksichtigt wurde. Nach theoretischen Betrachtungen von Seitz<sup>8</sup> ist in Germanium zwar der Hall-Koeffizient weitgehend isotrop, die magnetische Widerstandsänderung wird jedoch durch die Anisotropie erhöht und ist stark von der Orientierung der Kristallachsen zum Feld abhängig. Der Einfluß der Anisotropie wird bei InSb infolge der kleineren Symmetrie des Zinkblendegitters gegenüber dem Diamantgitter noch größer sein.

Herrn Dr. H. Welker danke ich für zahlreiche Diskussionen.

<sup>8</sup> F. Seitz, Physic. Rev. **79**, 372 [1950].